Завдання ІІ етапу Всеукраїнської олімпіади юних математиків 2012 рік

***6 клас***

\*\*\*

Дані відрізки довжиною 7 см і 12см. Скільки і яких відрізків треба взяти, щоб із них скласти відрізок в 1 м?

\*\*\*

На зборах секції було близько 80 школярів, третина з них — дівчата, половина з яких вчиться в 6 класі. З присутніх хлопчаків — 5/7 не вчаться в 6 класі. Скільки школярів 6 класу було на зборах секції?

\*\*\*

В двозначному числі закреслили цифру і воно зменшилося в 31 раз. Яку цифру закреслили і в якому числі?

\*\*\*

Прапори деяких держав утворено з чотирьох горизонтальних смуг різного кольору. Скільки існує різних варіантів прапорів з білою, синьою, жовтою та червоною смугами?

\*\*\*

Розв'язати рівняння:

8x — 3(2x+1) = 2x + 4

***7 клас***

\*\*\*

На продовженні діаметра **АВ** взято точку **С** і проведено січну **СКМ** так, що **СК** = **R**. Відомо, що кут **АСМ** = φ. Знайти кут **BOM**. Чи можливі дві вірні відповіді і чому?

\*\*\*

Що більше: добуток 1∙2∙3∙...∙20 чи сума 1+2+3+...+1 000 000?

\*\*\*

За допомогою циркуля і лінійки поділіть кут у 13° на 13 рівних частин.

\*\*\*

Є 350 кульок. Кожна за них білого, червоного або синього кольору. Червоних кульок в 4 рази менше, ніж білих і синіх разом, а синіх – у 6 разів менше, ніж білих і червоних разом. Скільки всього білих кульок?

\*\*\*

Як у виразі $\frac{1}{2}\*\frac{2}{3}\*\frac{3}{4}\*\frac{4}{5}\*…\*\frac{97}{98}\*\frac{98}{99}\*\frac{99}{100}$, який містить 99 дробів, замінити всі зірочки знаками арифметичних дій так, щоб значення одержаного арифметичного виразу дорівнювало 0?

***8 клас***

\*\*\*

Скільки дзеркал треба розмістити на стінах кімнати прямокутної форми, щоб людина, яка стоїть в її центрі, могла б бачити своє відображення?

\*\*\*

Знайти найбільше і найменше значення виразу:

$$\frac{3y^{2} - 4xy}{x^{2} +y^{2} }$$

\*\*\*

У рівнобедреному трикутнику з кутом при вершині 36° проведено бісектрису кута при основі. Скільки нових рівнобедрених трикутників утворилося? Які вони мають кути?

\*\*\*

Розв´язати рівняння:

| x+4 | = | 7 – x |

\*\*\*

У прямокутному трикутнику один з кутів дорівнює 30°. Із середини гіпотенузи провели до неї перпендикуляр. Довести, що довжина відрізка цього перпендикуляра, який лежить усередині трикутника, дорівнює третині довжини більшого катета.

***9 клас***

\*\*\*

Обчислити:

$$\frac{2a-b}{3a-b}+\frac{5b-a}{3a+b},$$

якщо 10а2 – 3b2 + 5ab = 0; 9a2 – b2 ≠0.

\*\*\*

У прямокутнику зі сторонами 4 см і 6 см проведено бісектриси кутів при його більшій стороні. Знайдіть, на які частини поділено площу прямокутника.

\*\*\*

Якими двома цифрами закінчується двадцятий степінь парного числа?

\*\*\*

Знайти найменше значення дробу

$$\frac{x^{2}-3x+3}{1-x}, якщо x<1$$

\*\*\*

При яких значеннях *а* сума коренів рівняння

x2 – 2*ax* + (2*a* - 1) = 0, дорівнює сумі квадратів його коренів?

***10 клас***

\*\*\*

Обчислити

*а*31 – 74*a*30 + 74*a*29 - ...+74*a*17 – 74*a*16 + 73*a*15 + 15, якщо *а* = 73

\*\*\*

В колі зі радіусом  **R** провели хорду і паралельно до неї дотичну. З кінців хорди на дотичну опустили перпендикуляри. Обчислити найбільш можливий периметр одержаного прямокутника.

\*\*\*

Доведіть, що серед 160 осіб знайдуться, принаймні, 4 особи, дні народження яких припадають на один і той самий тиждень високосного року, що починається з понеділка?

\*\*\*

На координатній площі зобразити точки, координати яких задовольняють систему рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c}18x^{2}y^{2}-4x^{3}y^{2}-3x^{2}y^{3}=0;\\ 12y^{2}-2xy^{2}+3y^{3}=0. \end{array}\right.$$

\*\*\*

Чи існує трикутник, сторони і кути якого якого утворюють дві арифметичні прогресії?

***11 клас***

\*\*\*

Через вершиу **С** прямого кута трикутника **ABC** проведено пряму **CD,** перпендикулярну до його площини. **AD = *a,***  **BD = *b,***  **CD = *c.*** Знайти медіану **СM** трикутника **ABC**.

 \*\*\*

Сторони трикутника виражені числами:

$$\sqrt{14}; tg\frac{π}{12} ;tg\frac{5π}{12} $$

Знайти площу трикутника.

\*\*\*

Розв´язати рівняння *13 + 4cos2x = 9cos x + 6 sin2x*

\*\*\*

Відомо, що $\frac{\cos(x +\cos(y + \cos(z ) ) )}{cos(x+y+z)}=\frac{\sin(x +\sin(y + \sin(z ) ) )}{sin(x+y+z)}=a$

Довести, що cos(x + y) + cos(y+z) + cos(z+x) = *a*

\*\*\*

Знайти всі натуральні m, для яких виконується рівність:

$$\left[\sqrt{m-1} +\sqrt{m+1}\right] = \left[2\sqrt{m}\right]$$